ΑΣΚΗΣΗ

$X\cap Y \subseteq X$
$X\cap Y \subseteq Y$

1. $\overbrace{(A\cap B)\cup\Gamma = A\cap(B\cup\Gamma)}^{(*)} \iff \Gamma\subseteq A$

$\Rightarrow$ Έστω ότι ισχύει η (*) θ.δ.ο. $\Gamma\subseteq A$

Έστω x τυχαίο στοιχείο $x\in\Gamma \xrightarrow{\Gamma\subseteq(A\cap B)\cup\Gamma} x\in(A\cap B)\cup\Gamma \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup\Gamma) \xrightarrow{A\cap(B\cup\Gamma)\subseteq A} x\in A$

$\Leftarrow$ Έστω $\Gamma\subseteq A$ θ.δ.ο. η (*) ισχύει

$A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma) = (A\cap B)\cup\Gamma$

$A^c\cap\Gamma^c = (A\cup\Gamma)^c$

2. $A\subseteq(B\cup\Gamma)^c$, $B\subseteq(\Gamma\cup A)^c$ και $\Gamma\subseteq(A\cup B)^c$

Αρκεί ν.δ.ο. $[A\subseteq(B\cup\Gamma)^c \wedge B\subseteq(\Gamma\cup A)^c] \Rightarrow \Gamma\subseteq(A\cup B)^c$

$x\in\Gamma \iff x\notin\Gamma^c \xrightarrow[B^c\cap\Gamma^c\subseteq\Gamma^c]{A^c\cap\Gamma^c\subseteq\Gamma^c} x\notin A^c\cap\Gamma^c \wedge x\notin B^c\cap\Gamma^c \iff$

$\iff x\notin(A\cup\Gamma)^c \wedge x\notin(B\cup\Gamma)^c \xrightarrow{A\subseteq(B\cup\Gamma)^c \wedge B\subseteq(A\cup\Gamma)^c} x\notin A \wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in B^c \wedge x\in A^c \iff x\in A^c\cap B^c = (A\cup B)^c$

25 $(x \dotplus y) = (X - Y) \cup (Y - X)$

ναι) $(\sigma \dotplus g)^{-1} = (\sigma - g) \cup (g - \sigma) = (\sigma - g)^{-1} \cup (g - \sigma)^{-1} =$
$= (\sigma^{-1} - g^{-1}) \cup (g^{-1} - \sigma^{-1}) = \sigma^{-1} \dotplus g^{-1}$

i) Έστω $\sigma \subseteq g$ θα δείξω ότι $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

$\Longrightarrow$

Έστω (x,y) τυχαίο στοιχείο του σ^{-1} $\quad (x,y) \in \sigma^{-1}$

$(x,y) \in \sigma^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in \sigma \xrightarrow{\sigma \subseteq g} (y,x) \in g \Leftrightarrow (x,y) \in g^{-1}$

Άρα $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

$\Longleftarrow$

Έστω $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1} \Longrightarrow (\sigma^{-1})^{-1} \subseteq (g^{-1})^{-1} \Longrightarrow \sigma \subseteq g$

iii) Θεωρώ τυχαίο στοιχείο $y \in R(\sigma) - R(g)$

$y \in R(\sigma) - R(g) \Leftrightarrow y \in R(\sigma) \wedge y \notin R(g)$

$\Longleftrightarrow [(\exists x_1 \in A)\,(x_1,y) \in \sigma] \wedge [(\forall x \in A)(x,y) \notin g]$

$\Longrightarrow (\exists x_1 \in A)\,(x_1,y) \in \sigma \wedge (x_1,y) \notin g$

$\Longleftrightarrow (\exists x_1 \in A)\,(x_1,y) \in \sigma - g \Longleftrightarrow y \in R(\sigma - g)$

Ν. δ. παράδειγμα ώστε η iii) να ισχύει και (

$\Longleftarrow$

iv) $\sigma = \sigma^{-1} \Longleftrightarrow \sigma \subseteq \sigma^{-1} \wedge \sigma^{-1} \subseteq \sigma$

Έστω $\sigma \subseteq \sigma^{-1} \xrightarrow{i)} \sigma^{-1} \subseteq (\sigma^{-1})^{-1} \Longrightarrow \sigma^{-1} \subseteq \sigma$

Επομένως $\sigma = \sigma^{-1}$

24. σ^{-1} αντίστροφη σχέση της σ

$\sigma^{-1} = \{(x,\alpha)\ (\xi,\alpha)\ (\eta,\varepsilon)\ (\lambda,\beta)\}$

$\sigma^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \sigma\}$ $\qquad (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$

$\sigma^{-1} \subseteq B \times A$

$\sigma \subseteq A \times A$, $\sigma : A \to B$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta(\sigma^{-1}) = R(\sigma) \\ R(\sigma^{-1}) = \Delta(\sigma) \end{array}}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$\sigma : A \to B$, $g : A \to B$ ώστε

i) $\sigma \subseteq g \Longrightarrow \sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

ii) $\Delta(\sigma) - \Delta(g) \subseteq \Delta(\sigma - g)$

iii) $R(\sigma) - R(g) \subseteq R(\sigma - g)$

iv) $(\sigma \cup g)^{-1} = \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

v) $(\sigma \cap g)^{-1} = \sigma^{-1} \cap g^{-1}$

vi) $(\sigma - g)^{-1} = \sigma^{-1} - g^{-1}$

vii) $(\sigma \circ g)^{-1} = \sigma^{-1} \circ g^{-1}$

viii) $\sigma \subseteq \sigma^{-1} \rightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

Αποδείξεις

iv) Θεωρώ τυχαίο στοιχείο $(x,y) \in (\sigma \cup g)^{-1}$

$(x,y) \in (\sigma \cup g)^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in \sigma \cup g \Longleftrightarrow (y,x) \in \sigma \vee (y,x) \in g \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \vee (x,y) \in g^{-1} \Longleftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

vi) Θεωρώ τυχαίο στοιχείο $(x,y) \in (\sigma - g)^{-1}$

$(x,y) \in (\sigma - g)^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in \sigma - g \Longleftrightarrow (y,x) \in \sigma \wedge (y,x) \notin g \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \wedge (x,y) \notin g^{-1} \Longleftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} - g^{-1}$

$A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$ $B = \{ \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi \}$

Η α ειναι μητερα του κ και ξ $\rightarrow (\alpha,\kappa), (\alpha,\xi)$
Η β ειναι μητερα του μ $\rightarrow (\beta,\mu)$
Η γ ειναι μητερα του λ $\rightarrow (\gamma,\lambda)$

$\sigma = \{ (\alpha,\kappa), (\alpha,\xi), (\beta,\mu), (\gamma,\lambda) \}$: ΣΧΕΣΗ απο ενα συνολο Α σε ενα συνολο Β

Α, Β συνολα
σχεση ονομαζουμε $\sigma \subseteq A \times B$
ΣΧΕΣΗ απο ενα συνολο Α σ'ενα συνολο Β ειναι ένα υποσυνολο σ του $A \times B$

$(x,y) \in \sigma \Longleftrightarrow x \sigma y$ $(x,y) \notin \sigma \Leftrightarrow x \not\sigma y$ δεν συνδεεται

$R(\sigma)$ = πεδιο τιμων του σ $\Delta(\sigma)$ = πεδιο ορισμου του σ

$\Delta(\sigma) = \{ x \in A \ (\exists y \in B) \ (x,y) \in \sigma \} \subseteq A$ πρωτη θεση ζευγου
$R(\sigma) = \{ y \in B \ (\exists x \in A) \ (x,y) \in \sigma \} \subseteq B$ δευτερη θεση ζευγου

$\sigma = \{ (\alpha,\kappa), (\alpha,\xi), (\beta,\mu), (\gamma,\lambda) \}$ $\Delta(\sigma) = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \subseteq A$
$R(\sigma) = \{ \kappa, \xi, \mu, \lambda \} \subseteq B$

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Delta(\sigma) \Longleftrightarrow (\exists y \in B) \ (x,y) \in \sigma \\ y \in R(\sigma) \Longleftrightarrow (\exists x \in A) \ (x,y) \in \sigma \\ x \notin \Delta(\sigma) \Leftrightarrow (\forall y \in B) \ (x,y) \notin \sigma \\ y \notin R(\sigma) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \ (x,y) \notin \sigma \end{array} \right\}$$

ποτε ενα στοιχειο ανηκει η ο
στο πεδιο ορισμου η στο πεδιο τ